

MODELADO MATEMÁTICO Y DISEÑO OPTIMO DEL PROCESO DE LIXIVIACIÓN EN PILAS

IVÁN ERNESTO GUEVARA BROGGI - ALUMNO

Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco/ Facultad de Ingeniería Química e Ingeniería Metalúrgica, Carrera profesional de Ingeniería Química, Ciclo IX
E-mail:hydromet_peru@yahoo.com

RESUMEN

La lixiviación en pilas es uno de los procesos hidrometalúrgicos más importantes en la extracción de cobre. Alrededor del 20% de la producción de cobre mundial se obtiene por medio del proceso de lixiviación. En la presente investigación se desarrolló una estrategia para el diseño y la optimización del proceso de lixiviación en pilas a través del modelado matemático y el diseño robusto. El modelo desarrollado incorpora aspectos tales como la cinética de lixiviación mineral, el transporte de reactivos, flujo de soluciones, flujo de gas y la actividad microbiana. Ha sido implementado en Matlab/Simulink®. El modelo fue calibrado por medio de pruebas experimentales en columnas de lixiviación de sulfuros de cobre, demostrando una adecuada capacidad predictiva. Finalmente la aplicación de estrategias de diseño robusto y optimización demostraron incrementos en la extracción de cobre de hasta en un 15% bajo ciertas condiciones.

INTRODUCCIÓN

La industria minera debe afrontar la necesidad de procesar minerales con leyes cada vez más bajas frente a la demanda creciente de cobre a nivel mundial, en este escenario la lixiviación en pilas se perfila como una tecnología de importancia creciente, debido a su capacidad para el tratamiento de minerales complejos y de baja ley; de esta manera materiales que hasta hace algún tiempo se consideraban desmonte pueden ser tratados de forma económica (Davenport, et al., 2011). Actualmente, la lixiviación en pilas es el proceso hidrometalúrgico más importante en la extracción de cobre, alrededor del 20% de la producción de cobre mundial se obtiene por este método (Ghorbani, et al, 2011). Aunque el concepto de lixiviación en pilas parece ser muy simple, los sub-procesos que tienen lugar en el interior de la pila son complejos y sus interacciones aún no se comprenden completamente. Dicha falta de comprensión, surge porque muchas de las investigaciones se han enfocado en sub-procesos específicos de forma aislada, como la química, microbiología, hidrodinámica, y no se han considerado las interacciones entre estos sub-procesos (Watling, 2006). En síntesis, para explotar todo el potencial que ofrece la lixiviación en pilas, es necesario desarrollar modelos que además ofrezcan estrategias de diseño y optimización, para su implementación en las operaciones industriales.

En los últimos 30 años se han sido desarrollados distintos modelos que varían en la cantidad de fenómenos considerados y en complejidad. Dichos modelos pueden clasificarse en las categorías siguientes (Dixon D. G., 2003):

- *Modelos abióticos*: aquellos que se encuentran limitados a situaciones donde no existe regeneración de reactivos en la pila. Han sido aplicados a la lixiviación de óxidos de cobre y a la cianuración de oro, destacando las publicaciones de (Roman, Benner, & Becker, 1974), (Dixon & Hendrix, 1993a) y (Dixon & Hendrix, 1993b).
- *Modelos de biolixiviación*: incluyen la presencia de bacterias ferro- y sulfo-oxidantes, cuya acción permite la regeneración de reactivos en la pila (regeneración de iones férrico y de ácido respectivamente). En esta categoría, destaca el modelo *HeapSim*® (Bouffard & Dixon, 2009) y (Petersen & Dixon, 2007), con una descripción sistemática de los

principales procesos que ocurren en el interior de la pila, es uno de los más completos. Por otra parte, los modelos multidimensionales, ofrecen un distinto enfoque del proceso, por medio de la aplicación de la fluido-dinámica computacional (*CFD*) a la lixiviación, que confiere al modelo la habilidad de simular estructuras espaciales en las pilas, destacan el modelo desarrollado por la *Universidad de Swansea* (Bennett, 2012) y el modelo desarrollado por *CSIRO* (Leahy & Schwarz, 2009).

Aunque los modelos desarrollados han llegado a describir con éxito el proceso de lixiviación en pilas, su uso generalizado en la industria minera presenta dificultades importantes. Una amplia proporción de los modelos no han sido calibrados frente a datos de laboratorio, lo cual hace que los modelos sean menos confiables como herramientas predictivas, por otra parte, aquellos modelos que fueron calibrados llevaron a cabo ajustes por medio de prueba y error, lo que constituye un procedimiento ineficiente. Pocos estudios han abordado el tema de la optimización del proceso de lixiviación en pilas. Publicaciones tales como (Padilla, Cisternas, & Cueto, 2008) y (Trujillo et al., 2014), plantean metodologías para optimizar el proceso de lixiviación en pilas, sin embargo hacen uso de modelos y condiciones de proceso bastante simplificadas. Finalmente, es necesario aclarar que hasta el momento no se han llevado a cabo estudios acerca de la aplicación de las técnicas de diseño robusto en la lixiviación en pilas. El presente estudio desarrolla una estrategia completa para el diseño y la optimización del proceso de lixiviación en pilas a través del modelado matemático, esta tarea se llevó a cabo en tres etapas que se describen a continuación:

Modelado matemático: Considera los principales sub-procesos llevados a cabo en el interior de la pila, que incluyen la cinética de disolución mineral, el transporte de solutos, la hidrodinámica de las soluciones lixiviantes, el transporte de oxígeno a través de la pila y la actividad bacteriana. Dichos sub-procesos fueron integrados en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales y han sido resueltos numéricamente mediante aproximaciones por diferencias finitas e implementados en el entorno de Matlab/Simulink®.

Estimación de parámetros: Para la implementación del presente modelo a un mineral en particular, es necesario llevar a cabo pruebas experimentales de lixiviación (a escala de laboratorio o planta piloto) y ajustar el modelo a dichas muestras, a este proceso de ajuste se le conoce como “calibración”. La presente investigación propone un método sistemático de ajuste a través del uso de algoritmos de minimización del índice de performance de la integral del error cuadrado (*ISE*). Una calibración rápida y eficiente facilita la aplicación del modelo a una amplia variedad de casos.

Diseño robusto: El diseño robusto consiste en determinar una solución óptima que permanezca insensible a posibles cambios en el entorno. El proceso de lixiviación en pilas, es especialmente sensible a los cambios en el entorno debido a los múltiples sub-procesos que se desarrollan en la pila. Aspectos tales como la heterogeneidad del material, la falta de uniformidad en la distribución de soluciones y la evaporación, factores ambientales, entre otros, hacen que la optimización del proceso, sea una tarea compleja y de difícil aplicabilidad. Por otra parte, la optimización convencional es especialmente sensible a pequeños cambios en las condiciones de operación, por ello resulta necesario aplicar los conceptos del diseño robusto a la lixiviación en pilas, que ofrecen una solución al problema de la incertidumbre y la variabilidad característica de este proceso, ya que permiten que la pila opere de forma óptima aun en condiciones desfavorables para el proceso.

OBJETIVOS

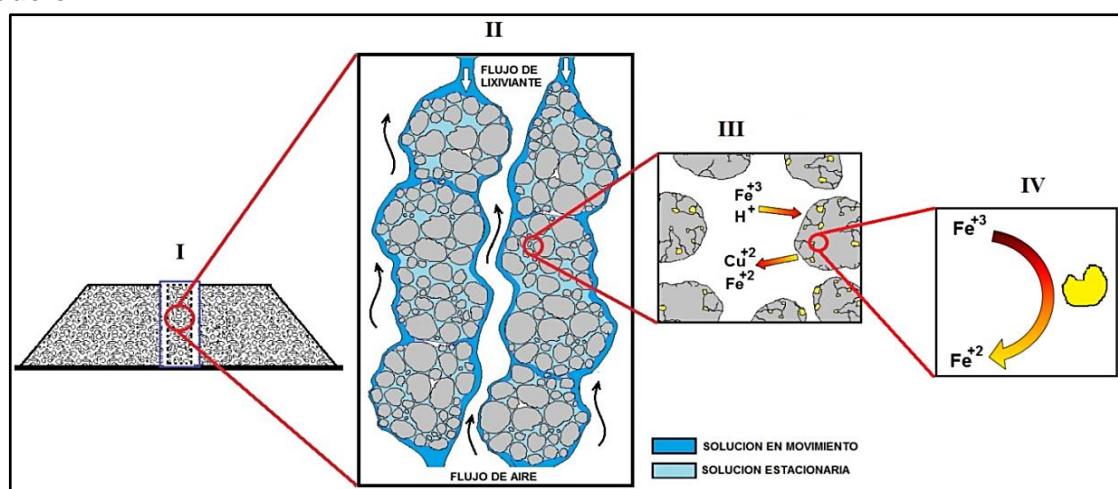
La presente investigación tiene como objetivos:

- Desarrollar un modelo que represente el proceso de lixiviación en pilas
- Calibrar el modelo por medio de pruebas experimentales en columnas de lixiviación
- Determinar las variables con mayor impacto en el proceso de lixiviación en pilas
- Aplicar técnicas de diseño robusto al modelo para maximizar la extracción de cobre

MARCO TEÓRICO

La pila de lixiviación puede considerarse como un reactor de lecho de partículas, que opera bajo condiciones no estacionarias de flujo insaturado, donde la solución lixiviante es aplicada en la superficie de la pila y gotea a través de los intersticios de las partículas minerales. Los reactivos se difunden a través de los poros y fisuras de las partículas, cuyo contenido metálico es gradualmente extraído por las reacciones. Con el fin de describir la pila en términos que faciliten la aplicación de las ecuaciones de transporte, es necesario delimitar el sistema de estudio en sub-sistemas. Resulta conveniente clasificar los sub-sistemas en niveles de: grano mineral, partícula mineral, aglomerado y pila, de acuerdo a Ogbonna, Petersen, y Laurie (2006), como se ilustra en la fig.1.

Figura 1. Diagrama esquemático de una pila de lixiviación, y las diferentes escalas del modelo.



[Fuente: (Guevara Broggi, 2014)] I) Escala de pila, donde se lleva a cabo el movimiento macroscópico de soluciones que transportan las especies disueltas hacia y desde el lecho mineral. II) Escala de aglomerado, el conjunto de partículas de diferente tamaño que constituyen los aglomerados interactúan con la solución estacionaria. III) Escala de partícula mineral, donde se lleva a cabo el transporte difusivo de especies disueltas, y IV) Escala de grano mineral, escala microscópica donde se disuelven los granos minerales

METODOLOGÍA

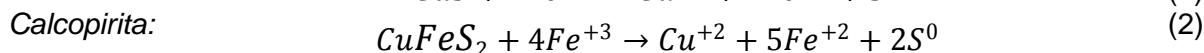
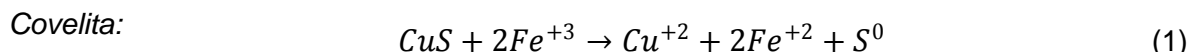
Se puso a prueba la capacidad predictiva del modelo desarrollado a través de pruebas experimentales en columnas de lixiviación, posteriormente se determinó los impactos de las principales variables en el proceso, y finalmente se aplicaron criterios de diseño robusto logrando optimizar el proceso.

1. Desarrollo del modelo

A continuación se observan las principales escalas del modelo y sus respectivas ecuaciones (ver Fig. 1).

1.1. Reacciones de disolución

En este nivel, la lixiviación puede ser descrita como la disolución progresiva de un grano mineral. En el presente trabajo se tomaron en cuenta las siguientes reacciones de lixiviación:



1.2. Cinética de lixiviación

Los mecanismos de reacción para el caso de los minerales de cobre han sido ampliamente investigados, sin embargo los valores exactos de sus parámetros críticos están sujetos a medidas experimentales (Petersen & Dixon, 2007). Las funciones térmica, topológica y química, para cada especie mineral fueron tomadas de (Barriga Vilca, 2013), (Ogbonna N., 2006) y (Bouffard & Dixon, 2009), y se observan a continuación:

Covelita:
$$r_{cv} = -k_{cv}(T) \left[\frac{C_{Fe^{+3}}}{F_{cv} + C_{Fe^{+2}}} \right]^{\phi_{Acv}} C_{cv}^{\phi_{cv}} \quad (3)$$

Calcopirita:
$$r_{cp} = -k_{cp}(T) \frac{\left[\frac{C_{Fe^{+3}}}{C_{Fe^{+2}}} \right]^{\phi_{Acp1}}}{\left[1 + \frac{C_{Fe^{+3}}}{C_{Fe^{+2}}} \right]^{\phi_{Acp2}}} C_{cp}^{\phi_{cp}} \quad (4)$$

1.3. Nivel de partícula

Las especies disueltas están sujetas al transporte difusivo en el interior de las partículas de roca. La ecuación de continuidad de las especies disueltas i (Fe^{+3} , H^+ , Cu^{+2} y Fe^{+2}) en el interior de una partícula de tamaño l , es la siguiente (Dixon & Hendrix, 1993):

Especie disuelta i:
$$\left[\varepsilon_0 \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ief} \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C_i}{\partial r} \right) + \rho_0(1 - \varepsilon_0)(\dot{r}_i) \right]_l \quad (5)$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$C_i(r, 0) = 0 \quad (6)$$

$$C_i(R_l, t) = C_{ib} \quad (7)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}(0, t) = 0 \quad (8)$$

1.4. Nivel de aglomerado

La fase líquida consta de una parte estacionaria y otra en movimiento, que intercambian especies químicas y microbianas con la fase sólida. El balance de especies disueltas de la solución estacionaria puede expresarse por la siguiente ecuación (Ogbonna, Petersen, & Laurie, 2006):

Especie disuelta i:
$$\varepsilon_b \frac{dC_{bi}}{dt} = -3\varepsilon_s D_i \sum_l \frac{w(R_l)}{R_l} \left(\frac{\partial C_i}{\partial r} \right)_{r=R_l} + k_{nbi} (C_{fi} - C_{bi}) \quad (9)$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$C_{bi}(0) = 0 \quad (10)$$

1.5. Nivel de pila

La velocidad de cambio de concentración de las especies químicas en la solución en movimiento se debe fundamentalmente a la advección, y a la velocidad de intercambio con la solución estacionaria (Ogbonna, Petersen, & Laurie, 2006). Las siguientes ecuaciones describen el transporte de las especies disueltas debido al flujo de soluciones en la pila:

$$i: \text{Especie disuelta} \quad \varepsilon_f \frac{\partial C_{fi}}{\partial t} = -v_s \frac{\partial C_{fi}}{\partial z} - k_{nbi} (C_{fi} - C_{bi}) \quad (11)$$

2. Datos experimentales

Para la calibración del modelo y el posterior análisis de los resultados, se utilizaron los datos experimentales obtenidos de estudios de lixiviación realizados en columnas, con muestras ROM (*run of mine*) de la división Collahuasi perteneciente a la compañía minera Anglo American Chile, publicados por Martínez Barrios (2012). Dichas pruebas se realizaron por un periodo de 350 días bajo condiciones típicas de operación (ver Tabla 1). Los datos experimentales disponibles de las pruebas de lixiviación de Collahuasi son la extracción de cobre, la concentración de cobre en el efluente, la concentración de ion ferroso en el efluente, el pH del efluente y el Eh (potencial) del efluente.

Tabla 1. Parámetros del mineral de Collahuasi

Características minerales		Unidad		Referencias
Densidad mineral	ρ_0	1.55	[ton/m ³]	(Martínez Barrios, 2012)
Condiciones operativas				
Tasa de riego	v_c	4.9	[L/m ² h]	(Martínez Barrios, 2012)
Altura de la pila	Z	6	[m]	
Granulometría	R_1	40	[mm]	
Temperatura de operación	T	23	[°C]	
Concentraciones de alimentación				
[Fe ⁺³]	$C_{Fe^{+3}}$	0.9	[g/L]	(Martínez Barrios, 2012)
[Fe ⁺²]	$C_{Fe^{+2}}$	3.4	[g/L]	
[Cu ⁺²]	$C_{Cu^{+2}}$	0.1	[g/L]	
[H ⁺]	$C_{H_2SO_4}$	9.8	[g/L]	
Mesófilos Ferro-oxidantes	N_{f0}	10 ⁶	[cel/L]	
Contenido mineral				
Covelita	CuS	0.2	[%]	(Martínez Barrios, 2012)
Calcopirita	CuFeS ₂	0.07	[%]	
Parámetros de transporte				
Difusividad Fe ⁺³	$D_{Fe^{+3}}$	10 ⁻⁸	[m ² /s]	(Ogbonna N. , 2006)
Difusividad Fe ⁺²	$D_{Fe^{+2}}$	10 ⁻⁸	[m ² /s]	
Difusividad Cu ⁺²	$D_{Cu^{+2}}$	10 ⁻⁸	[m ² /s]	
Difusividad H ⁺	D_{H^+}	10 ⁻⁸	[m ² /s]	
Coef. de transferencia de masa	k_{nbi}	0.1	[1/min]	

[Fuente: Elaboración propia]

3. Estimación de parámetros

La estimación del conjunto de parámetros toma la forma de un problema de optimización (Carvalho et al., 2015). La respuesta obtenida por el modelo en un tiempo dado ($E_{sim}(t)$) es comparada con el valor experimental ($E_{exp}(t)$), el error en cada instante es:

$$e_i(t) = E_{sim}(t) - E_{exp}(t) \quad (12)$$

Para la estimación de parámetros del modelo se utilizó como función objetivo el índice de performance del integral de error cuadrado (*ISE*) en su forma discreta:

$$ISE = \sum_t^n [e_i(t)]^2 \Delta t \quad (13)$$

De acuerdo a consideraciones teóricas los exponentes topológicos y las constantes de reacción son los parámetros más adecuados para el ajuste en la lixiviación (Petersen & Dixon, Modeling zinc heap bioleaching, 2007). En el presente ajuste se incluye a la constante de crecimiento bacteriano, debido a la presencia de bacterias en las pruebas experimentales de Collahuasi. Los resultados se muestran a continuación:

Tabla 2. Parámetros utilizados en la calibración del modelo

Parámetro	Símbolo	Unid.	Valor inicial	Intervalo de prueba		Valor final de ajuste*
				Mínimo	Máximo	
Cte. de reacción calcopirita	k_{cp}	[1/d]	0.01	0.00001	0.01	0.003735
Cte. de reacción covelita	k_{cv}	[1/d]	50	0.1	150	126.66
Exp. topológico calcopirita	ϕ_{cp}	[1/d]	0.667	0.667	2.5	0.97424
Exp. topológico covelita	ϕ_{cv}	[1/d]	0.667	0.667	2.5	1.8543
Cte. de crecimiento bacteriano	k_g	[1/d]	2	0.24	2.4	2.3945

[Fuente: Elaboración propia]

El procedimiento de estimación de parámetros, se llevó a cabo con el método de mínimos cuadrados no lineales utilizando el algoritmo Levenberg-Marquardt en Matlab®. El procedimiento iterativo permitió determinar la existencia de un mínimo local tal como se aprecia en la fig. 2.

Figura 2. Variación de la función *ISE* durante el proceso iterativo de ajuste de parámetros

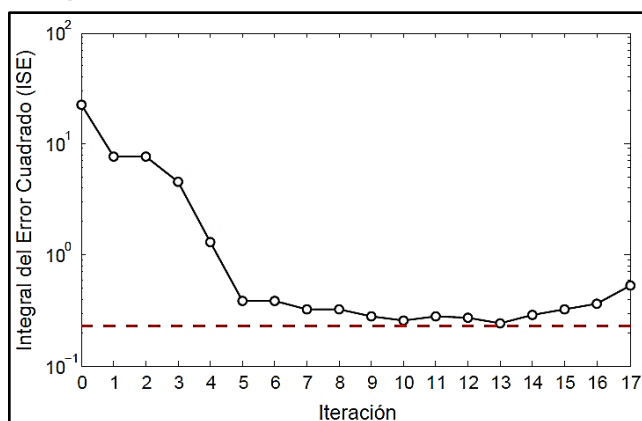
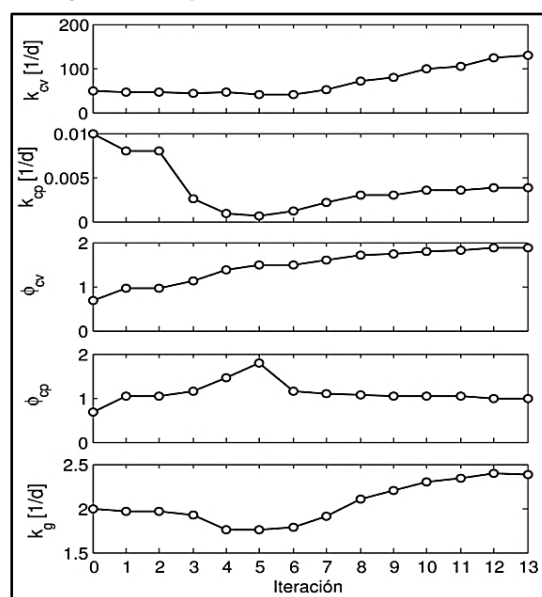


Figura 3. Variación de los parámetros cinéticos durante el proceso iterativo de ajuste de parámetros



Finalmente, es posible comparar la extracción experimental y la del modelo, donde se aprecia un buen ajuste particularmente desde los 50 días, periodo en el cual la acción oxidativa de las bacterias se encuentra plenamente desarrollada.

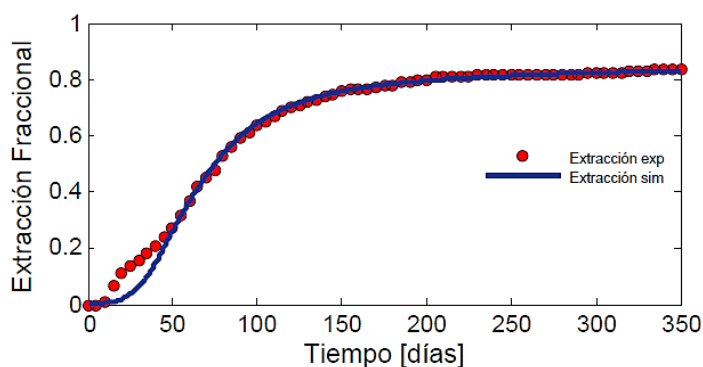
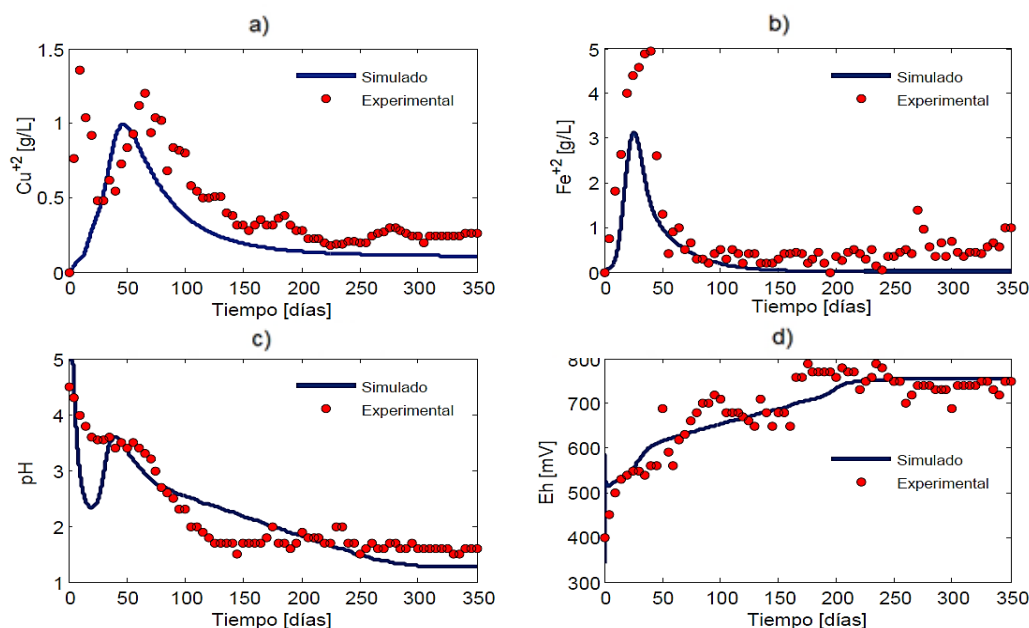


Figura 4. Resultados de la calibración del modelo para los datos de extracción de Collahuasi. Donde se comparan los resultados del modelo frente a los datos experimentales

Figura 5. Resultados de la calibración del modelo con los datos de la lixiviación en columna del mineral de Collahuasi. a) Concentración de cobre disuelto en el efluente, b) Concentración de ion ferroso en el efluente, c) pH en la solución efluente y d) Variación del potencial Eh en el efluente



4. Medición de importancia de variable

En el desarrollo del modelo resulta indispensable identificar el impacto de las variables de entrada en la respuesta del proceso, a este procedimiento se le denomina medición de importancia de variable o análisis de sensibilidad (Hamby, 1994). La extracción fue evaluada frente a la variación de los siguientes parámetros y sus rangos de operación más comunes reportados en la bibliografía tal como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 3. Principales parámetros y sus rangos de operación

Parámetro	Símbolo	Unidades	Caso base (x^*)*	Valores de prueba	
				Inferior	Superior
Radio de partícula	R	[cm]	4.4	1	7
Altura de la pila	Z	[m]	6	4	9
Flujo de lixiviante	u_s	[L/m ² h]	4.9	10	25
Ion férrico	[Fe ⁺³]	[mol/L]	0.9	0.1	8
Ion ferroso	[Fe ⁺²]	[mol/L]	3.4	0.1	10
Ácidosulfúrico	[H ₂ SO ₄]	[mol/L]	9.8	5	15
Bacterias Fe oxidantes	N_0	[cel/cm ³]	10 ⁶	10 ⁵	10 ⁸
Temperatura	T_{op}	[°C]	23	10	30

[Fuente: (Davenport et al., 2011)]* Se identifica como caso base los parámetros correspondientes a la columna de Collahuasi (Tabla 1)

A continuación se aprecia los resultados de la simulación del análisis de sensibilidad, donde se pusieron a prueba los parámetros de la Tabla 3, evaluando la extracción en cada caso.

Figura 6. Análisis de sensibilidad. (Sup. izq.) Efecto de temperatura en la extracción de cobre. (Sup.der.) Efecto de la granulometría en la extracción de cobre. (Inf. izq.) Efecto de la altura de la pila en la extracción de cobre. (Inf.der.) Efecto de la variación del flujo de lixiviante en la extracción de cobre.

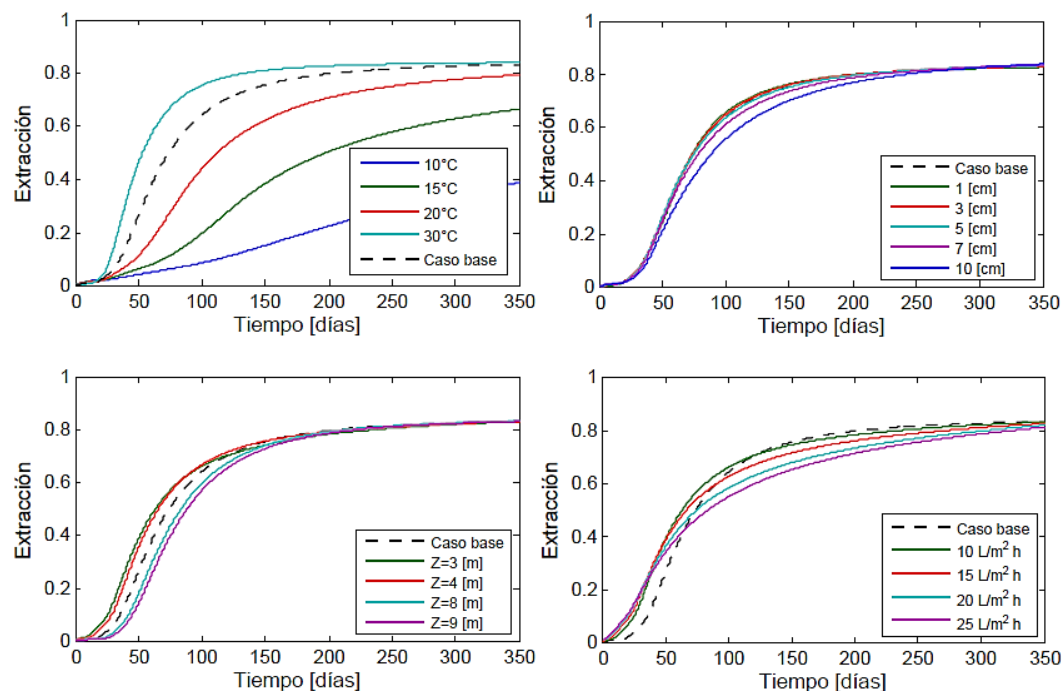
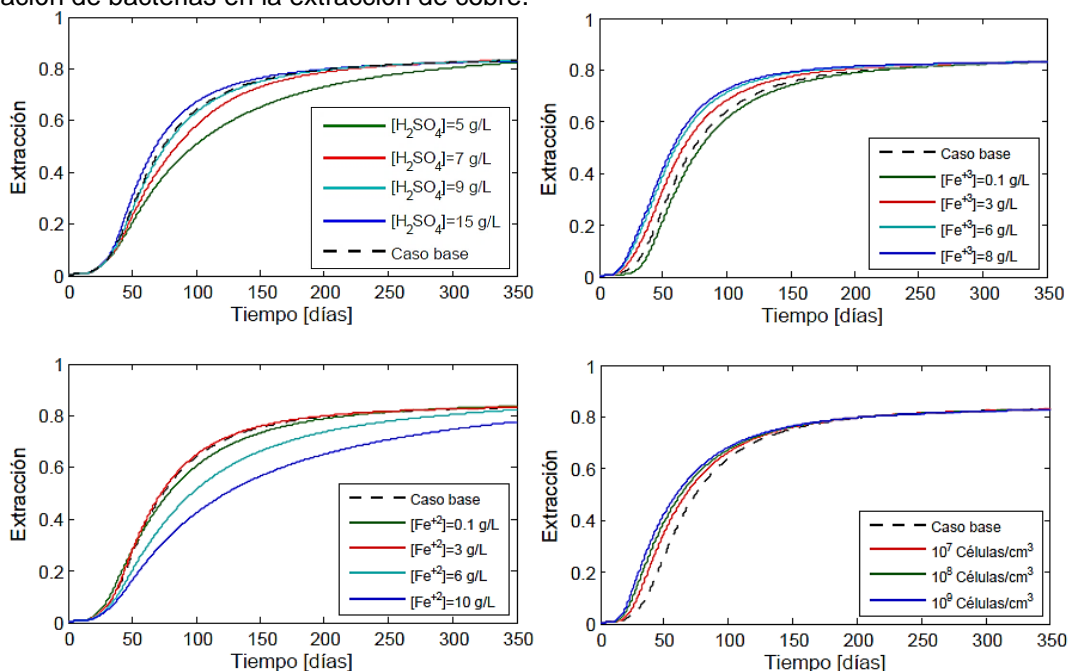


Figura 7. Análisis de sensibilidad.(Sup. izq.) Efecto de la concentración de ácido en la extracción de cobre. (Sup.der.) Efecto de la concentración de ion férrico en la extracción de cobre. (Inf. izq.) Efecto de la concentración de ion ferroso en la extracción de cobre. (Inf. der.) Efecto de la inoculación de bacterias en la extracción de cobre.



5. Optimización y diseño robusto

Desde el punto de vista práctico la determinación exacta del punto de operación óptimo, presenta el inconveniente de ser sensible a pequeños cambios debido a las variaciones e

incertidumbres de los parámetros durante la operación (Beyer & Sendhoff, 2007). Debido a esto surge el concepto de diseño robusto, el cual permite determinar una solución óptima que permanece relativamente insensible a la variación del entorno. La aplicación de los conceptos del diseño robusto a la lixiviación en pilas, ofrece una solución al problema de la incertidumbre y la variabilidad característica de este proceso.

Tabla 4. Principales parámetros que presentan variabilidad durante la operación en la lixiviación en pilas

Parámetro	Símbolo	Unidades	Valor nominal*	Intervalo de incertidumbre	
				Mínimo	Máximo
Temperatura	T_{op}	[°C]	25	15	25
Flujo de soluciones	u_s	[L/m ² h]	5	5	10
Ion Férrico en la alimentación	$[Fe^{+3}]$	[g/L]	1	1	6

[Fuente: Elaboración propia]

Tabla 5. Principales parámetros de diseño en la lixiviación en pilas y sus valores óptimos

Parámetro	Símbolo	Unidades	ValorInicial	Intervalo de prueba		ValorÓptimo*
				Mínimo	Máximo	
Altura de la	Z	[m]	6	3	9	4.429
Acido en la alimentación	$[H_2SO_4]$	[g/L]	9.8	5	15	14.927
Diámetro de partícula	D	[cm]	4.4	1	2.5	1.005

[Fuente: Elaboración propia]* La aplicación de los criterios de diseño robusto al modelo, permitieron evaluar el impacto de la incertidumbre de los parámetros de la Tabla 4 en la extracción de cobre, la optimización se llevó a cabo por el método de la gradiente (*Steepestdescent*) implementado en Matlab®, con el objetivo de maximizar la extracción de cobre.

Se obtuvo una respuesta que demuestra el gran impacto de las condiciones en la extracción, especialmente la temperatura. Puede observarse que la respuesta optimizada y el caso base tienden a tener el mismo valor a partir de los 150 días, momento en que la covelita ha reaccionado completamente, esto se debe a que la velocidad de reacción de la covelita se incrementa debido a las condiciones favorables que impone el diseño óptimo (menor granulometría, mayor acidez, mayor disponibilidad de ion férrico por acción bacteriana), sin embargo la calcopirita de carácter refractario es insensible a dichos cambios (ya que su cinética de disolución tiene como etapa controlante al transporte de reactivos y no a la disponibilidad de estos). Finalmente, se puede apreciar que el diseño óptimo encontrado responde adecuadamente a la variación de los parámetros (ver fig. 10), con incrementos sustanciales en la extracción, que van desde 10% al 15%.

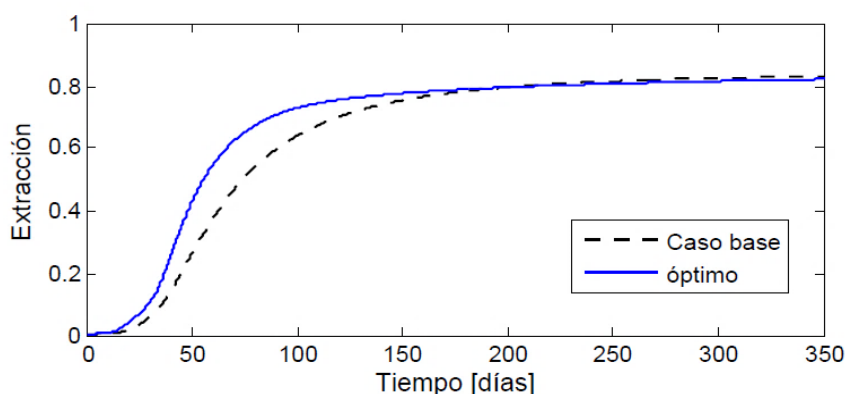
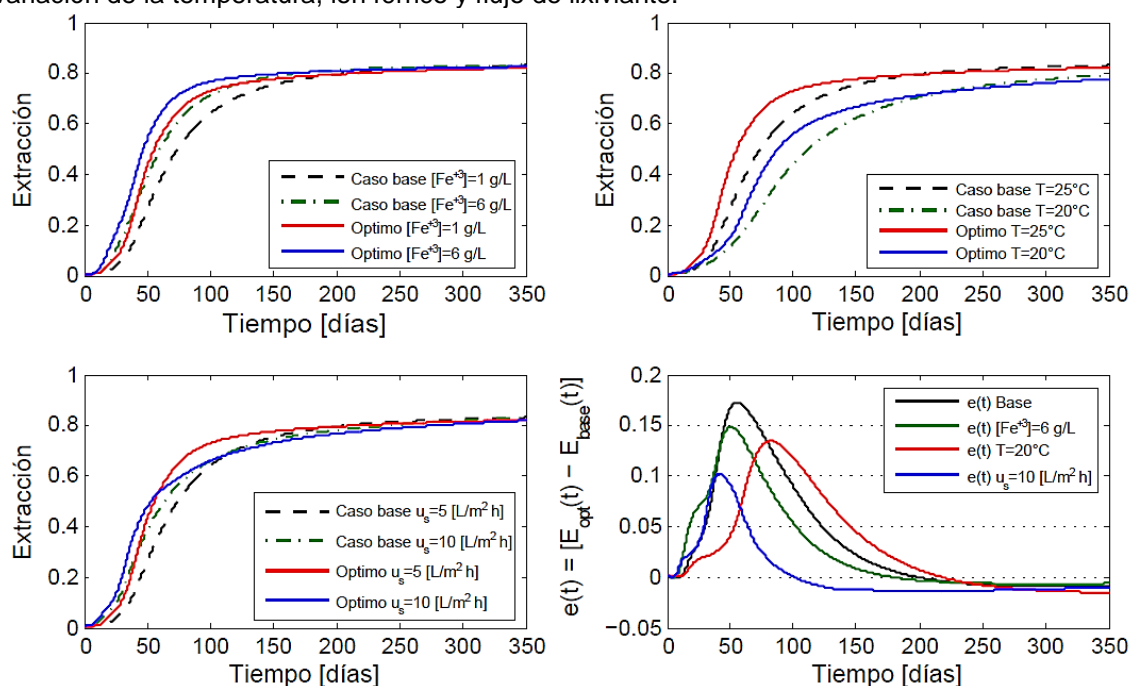


Figura 9. Respuesta optimizada del modelo comparada con el caso base

CONCLUSIONES

- La aplicación del modelo a las pruebas experimentales de lixiviación en columna, demostró un ajuste bastante adecuado, y tal como se observa en la Fig. 2 el error obtenido es mínimo
- La rutina de estimación de parámetros no sólo permite el ajuste adecuado en la extracción de cobre, sino que además se observa un buen ajuste respecto a las concentraciones en el efluente de cobre e ion ferroso, de igual forma para el pH y Eh.
- El análisis de sensibilidad permite observar la importancia de cada uno de los parámetros analizados y cuantificar el impacto de cada una de las variables en el proceso
- Finalmente, la aproximación al diseño robusto nos da una idea de las condiciones necesarias para una operación óptima, teniendo en cuenta las incertidumbres propias del proceso. En la Fig. 10 se observa el comportamiento óptimo del proceso aun en condiciones desfavorables.

Figura 10. Efecto de la variación de las condiciones de operación en la respuesta óptima del proceso. (Sup. izq.) Efecto de la concentración de ion férrico en la extracción. (Sup. der.) Efecto de la temperatura en la extracción. (Inf. izq.) Efecto del flujo de lixivianante en la extracción. (Inf.der.) Medición del error para cada instante de tiempo la respuesta óptima y el caso base ante la variación de la temperatura, ion férrico y flujo de lixivianante.



REFERENCIAS

- Ahmadi, A., Ranjbar, M., Schaffie, M., & Petersen, J. (2012). Kinetic modeling of bioleaching of copper sulfide concentrates in conventional and electrochemically controlled systems. *Hydrometallurgy* 127-128, págs. 16-23.
- Barriga Vilca, A. (2013). *Studies on the curing and leaching kinetics of mixed copper ores*. Vancouver, Canada: Master of applied science Thesis - University of British Columbia.
- Bartlett, R. W. (1998). *Solution Mining Leaching and Fluid Recovery of Materials* (Segunda ed.). New York: Taylor & Francis.

- Bennett, C. R., McBride, D., & Gebhardt, J. E. (2012). A comprehensive model for copper sulphide heap leaching Part 1 Basic formulation and validation through column test simulation. *Hydrometallurgy*, 127-128, págs. 150-161.
- Beyer, H.-G., & Sendhoff, B. (2007). Robust optimization - A comprehensive survey. *Computer methods in applied mechanics and engineering*(196), págs. 3190-3218.
- Bouffard, S. C. (2003). *Understanding the heap biooxidation of sulfidic refractory gold ores*. Vancouver: Ph.D. Thesis - University of British Columbia.
- Bouffard, S. C., & Dixon, D. G. (2009). Modeling pyrite bioleaching in isothermal test columns with HeapSim model. *Hydrometallurgy*, 95, págs. 215-226.
- Carvalho, E. P., Martínez, J., Martínez, J. M., & Pisnitchenko, F. (2015). On optimization strategies for parameter estimation in models governed by partial differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*(114), págs. 14-24.
- Crank, J. (1975). *The mathematics of diffusion* (2da Ed. ed.). Londres: Oxford University Press.
- Cross, M., Bennett, C. R., Croft, T. N., McBride, D., & Gebhardt, J. E. (2006). Computational modeling of reactive multi-phase flows in porous media: Applications to metals extraction and environmental recovery processes. *Minerals Engineering* 19, pgs.1098 - 1108.
- Davenport, W. G., Schlesinger, M. E., King, M. J., & Sole, K. C. (2011). *Extractive Metallurgy of Copper* (5ta ed.). Oxford, UK: Elsevier Ltd.
- Dixon, D. G. (2000). Analysis of heat conservation during copper sulphide heap leaching. *Hydrometallurgy* 58, pgs. 27-41.
- Dixon, D. G. (2003). Heap Leach Modeling - The current state of the art. *Hydrometallurgy 2003 - Vol 1* (págs. 289-314). TMS.
- Dixon, D. G., & Hendrix, J. L. (1993). A general model for leaching of one or more solid reactants from porous ore particles. *Metallurgical Transactions B*, 24b, págs. 157-169.
- Dixon, D. G., & Hendrix, J. L. (1993). A mathematical model for heap leaching of one or more solid reactants from porous ore pellets. *Metallurgical Transactions B*, 24B, págs. 1087-1102.
- Dixon, D. G., & Petersen, J. (2003). Comprehensive Modelling Study of Chalcocite Column and Heap Bioleaching. *Copper 2003 - Volume VI: Hydrometallurgy of copper (Book 2)*, págs. 493-516.
- Ghorbani, Y., Becker, M., Mainza, A., Franzidis, J., & Petersen, J. (2011). Large particle effects in chemical/biochemical heap leach processes - A review. *Minerals Engineering* 24, Págs. 1172-1184.
- Hamby, D. M. (1994). A review of techniques for parameter sensitivity analysis of environmental models. *Environmental Monitoring and Assessment*(32), págs. 135-154.
- Himmelblau, D. M., & Bischoff, K. B. (1976). *Análisis y simulación de procesos*. Madrid: Editorial Reverté, S.A.
- Jansen, M., & Taylor, A. (2003). Overview of gangue mineralogy issues in oxide copper heap leaching. *Alta Copper 2003 Conference*, (pág. 18). Perth, Western Australia.
- Leahy, M. J., & Schwarz, M. P. (2009). Modeling jarosite precipitation in isothermal chalcopyrite bioleaching columns. *Hydrometallurgy*, 98, págs. 181-191.
- Martínez Barrios, M. P. (2012). *Calibración, validación y aplicación del modelo Heapsim para estimar la producción de cobre de Los Bronces y Collahuasi*. Santiago de Chile: Tesis para optar al grado de Ingeniera Civil Química - Universidad de Chile.

- MathWorks Inc. (Version R2012a). Matlab product help.
- McBride, D., Croft, T. N., Cross, M., Bennett, C., & Gebhardt, J. E. (2014). Optimization of a CFD - Heap leach model and sensitivity analysis of process operation. *Minerals Engineering*, 57-64.
- Mellado, M. E., & Cisternas, L. A. (2008). An analytical–numerical method for solving a heap leaching problem of one or more solid reactants from porous pellets. *Computers and Chemical Engineering* 32, Págs. 2395–2402.
- Ogbonna, N. (Marzo de 2006). Mathematical modelling of agglomerate scale phenomena in heap bioleaching. *M.A.Sc. Thesis - University of Cape Town*.
- Ogbonna, N., Petersen, J., & Laurie, H. (Junio de 2006). An agglomerate scale model for the heap bioleaching of chalcocite. *The Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy*, 106, págs. 433-442.
- Padilla, G. A., Cisternas, L. A., & Cueto, J. Y. (2008). On the optimization of heap leaching. *Minerals Engineering*, 21, págs. 673-678.
- Pantelis, G., Ritchie, A. M., & Stepanyants, Y. A. (2002). A conceptual model for the description of oxidation and transport processes in sulphidic waste rock dumps. *Applied Mathematical Modelling* 26, pgs. 751-760.
- Petersen, J. (2010). Modelling of bioleach processes: connection between science and engineering. *Hydrometallurgy*, 104, págs. 404-409.
- Petersen, J., & Dixon, D. G. (2002). Systematic modelling of heap leach processes for optimisation and design. *EPD Congress 2002 - Fundamentals of advanced materials for energy conversion* (págs. 757-771). TMS.
- Petersen, J., & Dixon, D. G. (2007). Modeling zinc heap bioleaching. *Hydrometallurgy*(85), págs. 127-143.
- Roman, R. J., Benner, B. R., & Becker, G. W. (1974). Diffusion model for heap leaching and its application to scale-up. *AIME Transactions Vol. 256*, págs. 247-252.
- Sidborn, M., Casas, J., Martínez, J., & Moreno, L. (2003). Two-dimensional dynamic model of a copper sulphide ore bed. *Hydrometallurgy*, 71, págs. 67-74.
- Trujillo, J. Y., Cisternas, L. A., Gálvez, E. D., & Mellado, M. E. (2014). Optimal design and planning of heap leaching process. Application to copper oxide leaching. *Chemical Engineering Research and Design*, 308-317.
- Wadsworth, M. E. (1986). *Cinética de los procesos en metalurgia extractiva*. (M. E. Wadsworth, & Y. H. Sohn, Edits.) Mexico: Trillas.
- Wadsworth, M. E., & Madsen, B. W. (1981). *A mixed kinetic dump leaching model for ores containing a variety of copper sulphide minerals*. Bureau of mines report of investigation - United States Department of the Interior.
- Watling, H. R. (2006). The bioleaching of sulphide minerals with emphasis on copper sulphides - A review. *Hydrometallurgy*, 81, págs. 81-108.
- Wei, P., Lu, Z., & Song, J. (2015). Variable importance analysis: A comprehensive review. *Reliability Engineering and System Safety*(142), págs. 399-432.